ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES. - SAN SEBASTIAN

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

NOTA

Asignatura ESTADISTICA (2º p.) Nombre

Fecha 7-Abril-1990 Curso 3º Grupo N.º

A

C U E S T I O N E S.

1. Si la variable aleatoria bidimensional (X,Y) tiene por función de densidad $f(x,y)=k(x+y)$, $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1$, se verifica que:

a) X e Y son independientes. b) $f_1(x)=f(x/y)$. c) $f(y/x)=\frac{x+y}{x+1}$.

d) El coeficiente de correlación vale -1/11. e) La covarianza es 1/3.

2. Dada la distribución normal bidimensional (X,Y), con función de densidad $f(x,y)=k\exp -\frac{x}{2}(x+y)-\frac{y}{2}(x+2y)$, $-\infty<x<\infty$ y $-\infty<y<\infty$, se verifica que

a) El vector de las medias es (0,1). b) $M=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

c) $\rho=1/\sqrt{2}$. d) $k=1/\pi$. e) $E(Y/X=1)=0,25$.

3. Si la variable aleatoria X tiene como función de densidad $f(x)=kx^{1,5}e^{-3}$ para $x\geq 0$; para la variable aleatoria $Y=6X$ se verifica que:

a) El coeficiente de asimetría es $4/\sqrt{10}$. b) Es una gamma de $a=1/2$, p=

c) Su media vale 7. d) Su varianza es 5. e) Es una χ^2_{15} de Pear

4. De una población X normal (7;2) se toman muestras aleatorias simples de tamaño 80. Se verifica que:

a) $D^2(\bar{x})=1/20$. b) $E(s^2)=4,05$. c) $E(m)\geq 7$.

d) $\sum_{i=1}^{80} X_i^2$ es una χ^2_{80} de Pearson. e) $\frac{\bar{x}-7}{2}\sqrt{80}$ es una t_{79} de Student.

De dos poblaciones normales X e Y, incorreladas, se toman muestras aleatorias simples de tamaño 10. El valor de la función de densidad del coeficiente de correlación muestral r en el punto r=0 es igual a:

a) 1. b) 35/32. c) $\Gamma(9/2)/2\sqrt{\pi}\Gamma(4)$. d) 105/48. e) 47/42

6. El diámetro de unas tuercas fabricadas varía uniformemente entre 0 y 10 milímetros. Al tomar muestras de extensión 4 se detiene la fabricación si el recorrido muestral es igual o superior a 8. La probabilidad de que la fabricación se detenga es igual a:

a) 0,1525. b) 0,25. c) 0,1818. d) 0,1616.

e) Ninguna de las anteriores.

7. De la distribución bidimensional (X,Y) se sabe que la varianza de X es igual a 1, y que $E[(X-m_X)(Y-m_Y)]=2$. De la varianza de Y se puede afirmar que:

a) Puede ser 3,8. b) Debe ser ≤ 6. c) Vale 9/2.

d) Debe ser ≥ 5. e) Puede valer 4,2.

8. En una población normal tridimensional (X,Y,Z) con función de densidad $f(x,y,z)=k\cdot\exp-(\frac{1}{2}x^2+2y^2+\frac{1}{2}z^2-2xy+xz)$, se definen las nuevas variables $X_1=-2Z+4X$; $X_2=2Z+2Y$; $X_3=Z-X$. Para (X_1,X_2,X_3) se cumple que:

a) $\rho_{12}=-10/\sqrt{240}$. b) $\rho_{13}=-0,7$. c) $\rho_{23}=2/3$.

d) $\rho_{12\cdot 3}=0$. e) $\rho_{1(23)}=1$.

$A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\-2&4&0\\1&0&1\end{pmatrix}$; $|A|=4$

$M=A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4&2&-4\\2&2&-2\\-4&-2&8\end{pmatrix}$

$M_1=CMC'=\begin{pmatrix}40&-10&-14\\-10&5&4\\-14&4&5\end{pmatrix}$

9. Las notas de 10 alumnos en el primer examen parcial de Estadística en Test (T) y Numéricos (N) dan la siguiente nube de puntos: (1;1), (8;2), (6;1), (5;1), (10;2), (7;2), (6;2), (9;2), (7;1) y (6;0). Al prever linealmente la nota del test(T) en función de la nota N se tiene:

a) Cov(T,N)=-0,8. b) $|\rho|<0,5$. c) Bondad ajuste es >25%.

d) Para N=0, se prevé T≤3,5. e) Para N=3, se prevé T>9,5.

$\bar{N}=1,4$; $\bar{T}=6,5$; $\sigma_T=2,3345$; Cov=0,8; $\rho=0,5166$; $\rho^2=0,26687$; $T-6,5=\frac{0,8}{0,6}(N-1,4)\Rightarrow T=1,8183N+3,95435$

10. De un colectivo de 200 estudiantes, hay 20 no presentados a examen, 100 aprobados y 80 suspensos. La probabilidad de que, al tomar al azar 4 de los 200, haya al menos uno de cada uno de los tres grupos es:

a) 0,27. b) 8/25. c) 0,25. d) 26/100. e) 0,24.

$N=x$; $T=y$ $y=ax^2+bx+c$

$\sum N=14$; $\sum T=65$; $\sum N^2=24$; $\sum N^3=44$; $\sum N^4=84$

$\sum NT=99$; $\sum N^2T=179$

$\sum T^2=477$

$24a+14b+10c=65$
$44a+24b+14c=99$
$84a+44b+24c=179$

$a=2,25=\frac{9}{4}$; $b=-3,5=-\frac{7}{2}$; $c=6$

$T=2,25N^2-3,5N+6$

$R^2_{TN}=\frac{1}{\text{Var}(T)}E[(ax^2+bx+c-\bar{T})^2]=\frac{1}{5,45}E[2,25N^2-3,5N-0,5)^2]=$

$=\frac{2,15}{5,45}\simeq 0,39\Rightarrow 39\%$

$y=ax+b$

$24a+10b=65$
$14a+14b=99$

$a=\frac{144}{77}$; $b=\frac{87}{22}$

$Y=\frac{144}{77}x+\frac{87}{22}$

$y=f(x)$ curva regr.

Coef det: $R^2_{Y/X}=\frac{\sigma_Y^2-\sigma_{RY}^2}{\sigma_Y^2}$, con $\sigma^2_{RY}=D^2(Y-f(x))=E[(Y-f(x))^2]$

$R^2_X=\frac{1}{\sigma_Y^2}E[(f(x)-m_Y)^2]$;

1) $f(x,y)=k(x+y)$, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$.

$$k\int_0^1 dx\int_0^1 (x+y)dy = k\int_0^1 dx\cdot\left(x+\tfrac{1}{2}\right)=k\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)=1\Rightarrow k=1.$$

$f_1(x)=\int_0^1 (x+y)dy = x+\frac{1}{2}$; $f_2(y)=\int_0^1 (x+y)dx = y+\frac{1}{2}\Rightarrow f(x,y)\neq f_1(x)f_2(y)$

X e Y no son i

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{x+y}{x+\frac{1}{2}};\quad f(x/y)=\frac{x+y}{y+\frac{1}{2}};$$

$$m_x=\int_0^1 x\left(x+\tfrac{1}{2}\right)dx=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}=m_y;\quad \sigma_x^2=\int_0^1 x^2\left(x+\tfrac{1}{2}\right)dx-\frac{49}{144}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{49}{144}=$$

$$\sigma_{xy}=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dxdy-\frac{7}{12}\cdot\frac{7}{12}=\int_0^1 x\,dx\int_0^1(yx+y^2)dy-\frac{49}{144}=\int_0^1\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)x\,dx-\frac{49}{144}=$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{49}{144}=\frac{-1}{144}\Rightarrow\boxed{\rho=\frac{\frac{-1}{144}}{\frac{\sqrt{11}}{12}\cdot\frac{\sqrt{11}}{12}}=\frac{-1}{11}}$$

---

2) $\rho=\frac{-1}{\sqrt{2}}$; $\sigma_1=\sqrt{2}$; $\sigma_2=1$; $m_1=m_2=0$; $k=\frac{1}{2\pi}$; $E(Y/X=1)=\frac{1}{2}=0,5$

$\text{Cov}=\rho\sigma_1\sigma_2=-1$;

---

3) $f(x)=k\,x^{p-1}e^{-3x}$, $x\ge 0$: $\gamma(3;p)\Rightarrow Y=6X$. : $f(y)=f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|=\frac{1}{6}f(x)$

$$f(y)=\frac{1}{6}\cdot\frac{3^p}{\Gamma(p)}\frac{y^{p-1}}{6^{p-1}}e^{-\frac{y}{2}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^p}{\Gamma(p)}y^{p-1}e^{-\frac{y}{2}},\ y\ge 0:\ \gamma\left(\tfrac{1}{2},p\right)\equiv\chi^2_{2p=n}\Rightarrow m=2p;\ \sigma^2=$$

$\gamma=\frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$; $\mu_3=\alpha_3-3\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1^3$; $\alpha_1=2p$; $\alpha_2=n(n+2)=4p(p+1)$; $\alpha_3=n(n+2)(n+4)=8p$

$$\mu_3=8p(p+1)(p+2)-24p^2(p+1)+16p^3=8p^3+24p^2+16p-24p^3-24p^2+16p^3=16p\Rightarrow\gamma=\frac{16p}{4p\sqrt{4}}$$

$\gamma=\frac{2}{\sqrt{p}}$;

- $p=\frac{5}{2}$: $\gamma=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, $m=5$, $\sigma^2=10$, es χ^2_5
- $p=\frac{3}{2}$: $\gamma=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $m=3$, $\sigma^2=6$ es χ^2_3
- $p=\frac{7}{2}$: $\gamma=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$, $m=7$, $\sigma^2=14$ es χ^2_7
- $p=\frac{9}{2}$: $\gamma=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $m=9$, $\sigma^2=18$, es χ^2_9
- $p=\frac{11}{2}$: $\gamma=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$, $m=11$, $\sigma^2=22$, es χ^2_{11}

4.) $\frac{\bar{X}-7}{\frac{2}{\sqrt{n}}}$ ~ $N(0;1)$ és $\frac{nS^2}{4}$ ~ χ^2_{n-1}

$n=80$: $E(S^2)=\frac{79}{20}=3{,}95$, $D^2(\bar{X})=\frac{2}{\sqrt{80}}=\frac{\sqrt{80}}{40}=0{,}2236$, $D^2(\bar{X})=\frac{1}{20}$, $\frac{\bar{X}-7}{2}\sqrt{80}:N(0;1)$

$n=60$: $E(S^2)=\frac{59}{15}=3{,}9\overline{3}$; $D^2(\bar{X})=\frac{1}{15}$; $\frac{\bar{X}-7}{2}\sqrt{60}:N(0;1)$, $D(\bar{X})=\frac{2}{\sqrt{60}}$

$n=70$: $E(S^2)=\frac{135}{35}=3{,}942857$; $D^2(\bar{X})=\frac{2}{35}$; $\frac{\bar{X}-7}{2}\sqrt{70}:N(0;1)$

$n=50$: $E(S^2)=\frac{98}{50}=1{,}96$; $D^2(\bar{X})=\frac{2}{25}$; $\frac{\bar{X}-7}{2}\sqrt{50}:N(0;1)$

) $\rho=0$: $f(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\cdot(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}$, $-1\le r\le 1$.

$f(0)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}$; $n=10$: $f(0)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}{\Gamma(4)}=\frac{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}\cdot 3\cdot 2}=\frac{35}{32}=1{,}09375$

$=12$: $f(0)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}{\Gamma(5)}=\frac{\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=\frac{315}{256}$

$=14$: $f(0)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)}{\Gamma(6)}=\frac{\frac{11}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=\frac{693}{2^9}=\frac{693}{512}$

$=8$: $f(0)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(3)}=\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}\cdot 2}=\frac{15}{16}=0{,}9375$

~~R:~~ $f(R)$? $f(x)=\frac{1}{k}$, $0\le x\le k$, és $f(R)=\frac{n(n-1)}{k^n}R^{n-2}(k-R)$, $0\le R\le k$.

$)=\frac{1}{10}$, $0\le x\le 10$, $f(R)=\frac{12}{10^4}R^2(10-R)$, $0\le R\le 10$

$\ge 8)=\int_8^{10}\frac{12}{10^4}(10R^2-R^3)dR=\frac{12}{10^4}\left[\frac{10R^3}{3}-\frac{R^4}{4}\right]_8^{10}=1-\int_0^8 f(R)dR=1-\frac{12}{10^4}\left[\frac{10}{3}R^3-\frac{R^4}{4}\right]_0^8=$

$=1-\frac{12}{10^4}\left[\frac{10}{3}\cdot 8^3-\frac{8^4}{4}\right]=1-\frac{12}{10^4}\cdot 8^3\cdot\frac{4}{3}=1-\frac{16\cdot 512}{10000}=\boxed{0{,}1808}$

$\ge 9)=1-\int_0^9\frac{12}{10^4}(10R^2-R^3)dR=1-\frac{12}{10^4}\left[\frac{10}{3}\cdot 9^3-\frac{9^4}{4}\right]=1-\frac{13\cdot 9^3}{10^4}=\boxed{0{,}0523}$

$R\ge 7)=1-\frac{12}{10^4}\left[\frac{10}{3}\cdot 7^3-\frac{7^4}{4}\right]=1-\frac{7^3\cdot 19}{10^4}=\boxed{0{,}3483}$

$;\ge 6)=1-\frac{12}{10^4}\left[\frac{10}{3}\cdot 6^3-\frac{6^4}{4}\right]=1-\frac{6^3\cdot 22}{10^4}=\boxed{0{,}5248}$

$\rho^2=\frac{Cov^2}{D^2\cdot D^2}\le 1\Rightarrow D^2\ge Cov^2$: $\boxed{D^2\ge 4}$; $\boxed{D^2\ge 9}$ $\boxed{D^2\ge 16}$ $\boxed{D^2\ge 25}$

$A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\-2&4&0\\1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow|A|=4\Rightarrow k=0{,}127\Rightarrow M=A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0{,}5&-1\\0{,}5&0{,}5&-0{,}5\\-1&-0{,}5&2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}4&0&-2\\0&2&2\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&-\frac{1}{2}&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&-1\\0&2&0\\-2&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40&-10&-14\\-10&6&4\\-14&4&5\end{pmatrix}\Rightarrow P=\begin{pmatrix}1&\frac{-10}{\sqrt{240}}&\frac{-14}{\sqrt{200}}\\-&1&\frac{4}{\sqrt{96}}\\-&-&1\end{pmatrix}$

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES. - SAN SEBASTIAN

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

NOTA

Asignatura ESTADISTICA (Final) Nombre

Fecha 6-Junio-1990 Curso 3º Grupo A Nº

CUESTIONES.

1.. La función de densidad de la variable aleatoria tridimensional (X,Y,Z) e $f(x,y,z)=24x^3y^2z$, variando las tres entre 0 y 1. Se verifica que:

a) La recta de regresión de z sobre y es $z=y+(2/3)$.
b) X e Y no son independientes.
c) $\rho_{1(23)}=0$.
d) $\rho_{1\cdot 23}\neq 0$.
e) El plano de regresión de z sobre x e y es $z=(2/3)-x+y$.

2. La variable bidimensional (X,Y) tiene por función de densidad $f(x,y)=6e^{-(3y+2x)}$, para x e y en el primer cuadrante. Para las variables $u=x-y$, y $v=x+y$ se verifica que:

a) Son incorreladas pero no independientes.
b) $\rho=4/13$.
c) Cov $=-5/3$
d) La previsión lineal de v para u=0 es 10/13.
e) La bondad del ajuste lineal de v en función de u es de un 50% al menos.

3. Si las variables X, con $f(x)=0,5x^2e^{-x}$, $x\geq 0$, e Y, con $f(y)=(1/6)e^{-y}y^3$, $y\geq 0$, y las probabilidades $P(X_{14}^2\leq 21,1)=0,9$ y $P(X_{14}^2\leq 17,1)=0,75$, la probabilidad $P(X+Y\leq 9,55)$ es igual a:

a) 0,825. b) 0,850. c) 0,750. d) 0,775. e) 0,815.

4. Si la matriz inversa de la matriz de momentos centrales de 2º orden de la distribución normal bidimensional (X,Y) es $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, se verifica que, si el vector de medias es (0;5):

a) X e Y son incorreladas.
b) $\sigma_1=3/5$.
c) $\sigma_2=\sqrt{2/5}$.
d) Cov (X,Y)=1/5.
e) $\rho=-1/6$.

5. Si la función de densidad de la variable X es $f_1(x)=Cx$, $0\leq x\leq 2$, y la de la variable Y es $f_2(y)=Ky$, $0\leq y\leq 1$, la probabilidad $P(XY\leq 1,5)$ vale:

a) $1,125\cdot\ln(4/3)$.
b) $0,5625+\ln(4/3)$.
c) $0,5625+1,125\cdot\ln(4/3)$.
d) $0,5625+1,125(\ln 1,5-\ln 2)$.
e) $0,5+1,125\ln(3/4)$.

6. La probabilidad de que la mediana muestral sea menor que 1, en una m.a.s. ordenada de tamaño 7 tomada de una población uniforme en (0;5) vale:

a) $1432/3\cdot 5^6$.
b) $1423/5^6$.
c) $1523/3\cdot 5^7$.
d) $1423/5^6\cdot 3$.
e) $1413/5^6$.

7. Para estimar el parámetro A de una población, se construye para A un intervalo de confianza (a,b) al 90%. Si se tienen los valores de a y b para 100 muestras, la probabilidad de que 2 de esos 100 intervalos, como máximo, no contengan a A es:

a) $0,9^{98}\cdot 59,31$.
b) $0,9^{99}\cdot 59,31$.
c) $0,9^{97}\cdot 59,31$.
d) $0,9^{99}\cdot 58,81$.
e) 0,01.

8. De una distribución X binomial con p=0,8 y n=25 se puede decir que:
   a) No se debe aproximar por la distribución normal N(20;2).
   b) A lo sumo la mitad de los valores de X son mayores o iguales a 40.
   c) Entre 10 y 30 deben existir, al menos, un 98% de valores de X.
   d) Los valores de X menores que 40 no se debe esperar lleguen a la mitad
   e) Su mejor aproximación es la distribución de Poisson de λ=20.

9. En una clase hay una cuarta parte de alumnos repetidores, y además el 60% de los alumnos repetidores y el 80% de los alumnos nuevos son varones. Se toman al azar 2 alumnos, y ambos resultan ser mujeres. La probabilidad de que, tras este resultado, los dos alumnos elegidos sean ambos nuevos ó bien ambos repetidores es:

   a) 0,50. b) 0,48. c) 12/25. d) 27/50. e) 52/100.

10. Una asignatura tiene 14 temas, 5 en su primera parte y 9 en la segunda. Se sacan dos de los 14 temas, y se desea estudiar la probabilidad de que resulten exactamente uno de cada parte. Entonces se cumple que:

   a) Es indiferente extraer los temas con ó sin reposición.
   b) Es mayor la probabilidad si se extraen los temas con reposición.
   c) Se necesita aproximar por la distribución de Poisson si se calcula la probabilidad al hacer las extracciones con reposición.
   d) Si se extraen sin reposición, no se puede identificar el experimento con la distribución hipergeométrica.
   e) Es menor la probabilidad si las extracciones son con reposición.

c d a c c d a b e e

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES. - SAN SEBASTIAN

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

NOTA

Asignatura ESTADÍSTICA (1ºp.) Nombre

Fecha 29-Enero-1991 Curso 3º Grupo Nº

Primer examen parcial de E S T A DI S T I C A (3º). Curso 1990-91.

A

C U E S T I O N E S.

1. Una nube de puntos está representada por la variable aleatoria (X,Y,Z) cuya función de densidad es $f(x,y,z)=z(2y+3x^2)$, comprendidas las tres entre 0 y 1. Al realizar por los mínimos cuadrados la previsión de z en función de x y de y, se verifica que:

   a) La previsión lineal y la óptima coinciden.
   b) El coeficiente de sesgo de z vale $5\sqrt{15}/\sqrt{73}$.
   c) El coeficiente de asimetría de z vale $-\sqrt{2/5}$.
   d) La superficie de regresión óptima es $z=(x^2+y^2)\frac{2}{3}$.
   e) No es necesario introducir nuevas variables explicativas.

2. Las variables aleatorias X, Y, Z tienen, cada una de ellas, igual media y desviación típica, que valen 1, 2 y 3, respectivamente. Para las variables $X_1=X$; $X_2=X+Y$; $X_3=Y+Z$, se verifica que:

   a) $\rho_{12}=4/\sqrt{65}$. b) Coeficiente de correlación parcial entre X_1 y X_2 es igual a $\sqrt{13}/5$. c) Coeficiente de correlación múltiple de X_1 es igual a $\sqrt{10}/7$. d) Coeficiente de determinación en la previsión lineal de X_1 en función de X_2 y X_3 vale 13/49.
   e) La varianza residual de la previsión lineal de X_1 en función de X_2 y X_3 vale 35/49.

3. En una fabricación de 10.000 piezas, hay 2.500 excelentes, 5.000 admisibles y 2.500 rechazables. Al tomar 5 piezas al azar, la probabilidad de que no haya ninguna pieza rechazable es:

   a) $\frac{234}{10^3}$. b) $\frac{256}{2^{10}}$. c) $\frac{243}{2^{10}}$. d) $\frac{234}{2^9}$. e) $\frac{245}{2^{11}}$.

4. En una avenida hay cierto número de semáforos, que están ó abiertos ó cerrados, siendo la probabilidad de que esté abierto un semáforo si lo está el anterior de 0,6, y la probabilidad de que esté abierto un semáforo si está cerrado el anterior de 0,2. Suponiendo que la probabilidad de que esté abierto el primer semáforo es de 0,5, la probabilidad de que esté abierto el semáforo 3º si lo está también el 4º vale:

   a) 2/3. b) 27/43. c) 3/4. d) Más que la probabilidad de que esté abierto el 2º si lo está el 3º.
   e) Menos que la probabilidad de que esté abierto el 10º si lo está el 11º

B

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES DE SAN SEBASTIÁN.

Primer examen parcial. 13 de Diciembre de 1989. ESTADISTICA (2º).

CUESTIONES. (45 minutos)

1. Urna con 20 bolas numeradas del 1 al 20. Si se sacan 4 al azar sin reposición, la probabilidad de que el número máximo de 4 cifras formado no sea superior a 15 es igual a:
a) [illegible]. b) $\binom{14}{4}/\binom{20}{4}$. c) 0,2615. d) $\binom{15}{5}/\binom{20}{5}$. e) Ninguna.
(a) $\binom{15}{4}/\binom{20}{4}$

2. Si X es normal N(m;1), y P(X>2)=0,75, m vale $\Phi(0,675)=0,75$:
a) 1,625. b) 2,75. c) 0,75. (d) 2,675. e) 3,275.

3. Variable X discreta con valores 0,1,2 y 3, y probabilidades respectivas de 1/2, 1/4, 1/8 y 1/8. La varianza de X vale:
(a) 71/64. b) 15/8. c) 7/8. d) 49/64. e) 17/8.

4. Experimento aleatorio con dos sucesos, éxito y fracaso, con probabilidades respectivas de 0,6 y 0,4. Al realizarse pruebas del experimento, la probabilidad de que el 2º éxito ocurra en la 5ª repetición es:
a) 0,9216. (b) $4 \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^3$. c) $0,64 \cdot 0,6^3$ d) 0,08. e) $1,44 \cdot 0,64$

5. Variable Z normal N(0;1), y variable $X=Z^2$. Sabiendo que la función de distribución de Z en $\sqrt{2}$ vale 0,9213, la probabilidad $P(X \leq 2)$ vale:
a) 7/8. b) 0,9416. (c) 0,8426 d) 0,9213. e) Ninguna.

6. X es una variable binomial con E(X)=20, y D(X)=4. Entonces se verifica:
a) q=0,2. b) n=10. c) p=0,5. d) p=0,8. (e) n=100.

7. Variable X de Poisson, con $\lambda=4$. El cuantil $x_{2/5}$ vale:
a) 0. b) 1. c) 2. (d) 3. e) 4.

8. El número medio de piezas que pasan antes de la primera rotura en un proceso con probabilidad de rotura 0,04, es igual a:
a) 34. b) 48. c) 16. d) 32. (e) 24.
→ Geométrica: $P(G(p)=X) = q^x \cdot p$ $\begin{cases} E(X) = q/p \rightarrow 0,96/0,04 = 24 \\ V(X) = q/p^2 \end{cases}$

9. De una variable aleatoria X se sabe que D(X)=2, y E(X)=5. Al tomar al azar 100 valores de X, se puede esperar que entre 1 y 9 haya:
a) Sólo 60. b) La mitad. (c) 70 ó más. (d) Al menos 65. d) Unos

10. Si la variable X tiene por función de distribución $F(x)=0$, $x \leq 0$; $F(x)=x/2$, $0<x \leq 0,8$; $F(x)=0,4+(x/4)$, $0,8<x \leq 2,4$; $F(x)=1$, $2,4<x$. La probabilidad de que al tomar al azar 5 valores de X, 3 estén a la izquierda de x=1,2 y los otros 2 a su derecha, es igual a:
a) 0,3287. (b) $0,9 \cdot 0,7^3$. c) $\binom{5}{3} 0,3^3 \cdot 0,7^2$. d) 0,2987. e) $10 \cdot 0,$

2

EJERCICIOS NUMÉRICOS. (45 minutos)

1. De una variable aleatoria X uniforme entre 0 y 4, calcular exactamente su coeficiente de aplastamiento.

$f(x)=\frac{1}{4}$, $0\le x\le 4$; $m=\alpha_1=2$; $\alpha_2=\frac{16}{3}$; $\alpha_3=16$; $\alpha_4=\frac{256}{5}$.

$\sigma^2=\mu_2=\frac{4}{3}$; $\mu_4=\frac{16}{5}$; $\delta=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}-3=\frac{16/5}{16/9}-3=\frac{-6}{5}=-1,2$ RESULTADO: **−1,2**

2. Se supone que un determinado artículo es consumido por el 35% de la población. Un encuestador pregunta a 100 personas, tomadas al azar, si consumen el artículo, repitiéndose esta experiencia 5000 veces. ¿En cuántas de esas 5000 veces deben esperarse 45 ó más respuestas afirmativas?

X: nº de personas, de 100, que consumen artículo ⇒

$P(45\le X\le 100)=\binom{100}{r}0,35^r 0,65^{100-r}\simeq P(44,5\le \eta\le 100,5)=P\left(\frac{44,5-35}{4,77}\le \zeta\le \frac{100,5-35}{4,77}\right)=P(1,992\le \zeta\le 13,732)=1-\Phi(1,992)=1-0,9768=0,$

$\Rightarrow 5000\times 0,0232=1$

X binomial $n=100$, $p=0,35$; $q=0,65$

η normal $m=np=35$; $\sigma=\sqrt{npq}=4,77$

RESULTADO: **116**

3. Seis máquinas M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 y M_6 producen elementos iguales siendo las fracciones defectuosas, respectivamente, de 2, 3, 5, 6 y 8 por 1000. Admitiendo que las seis máquinas tienen la misma probabilidad de elección, de una de ellas se toma una muestra de 200 elementos, observándose que son defectuosos 4 ó menos. Hallar la probabilidad de que la máquina elegida haya sido cualquiera de las dos últimas.

M_i: se elige máquina M_i, con $i=1,2,3,4,5,6$.

B: se toman 200 elementos de una máquina y hay 4 ó menos defectuosos.

$P(M_5/B)+P(M_6/B)=\frac{P(M_5)P(B/M_5)+P(M_6)P(B/M_6)}{\sum_{i=1}^{6}P(M_i)P(B/M_i)}$; $P(M_i)=p\ \forall i=1,2,3,4,5,6.$

RESULTADO: **0,330**

$P(B/M_4)=\sum_{r=0}^{4}\binom{200}{r}0,002^r\cdot 0,998^{200-r}\simeq\sum_{r=0}^{4}\frac{0,4^r}{r!}e^{-0,4}$ (Poisson) $=0,9999$.

$p=\lambda=0,4<5$; $p<0,1$

Análogamente, variando solo p y q, se hallan $P(B/M_2)=0,9997$; $P(B/M_3)=0,9986$; $P(B/M_4)=0,9963$; $P(B/M_5)=0,9922$; $P(B/M_6)=0,9762$.

$$P=\frac{0,9922+0,9762}{0,9999+0,9997+0,9986+0,9963+0,9922+0,9762}=0,330$$

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES DE SAN SEBASTIÁN.

Primer examen parcial. 13 de Diciembre de 1989. ESTADISTICA (3º).

PROBLEMA. (30 minutos)

Se fabrican piezas cuyos pesos están representados por una variable aleatoria X con función de densidad $f(x)=k(x-1)(6-x)$, $1\leq x\leq 6$; $f(x)=0$, si $x<1$ y si $x>6$ (x en kilos). Se consideran correctaslas piezas cuyos pesos están comprendidos entre $E(X)-1,5D(X)$ y $E(X)+1,5D(X)$ kilos. Las piezas se embalan en cajas de 8 unidades.

Se pide:

1º. Valores de E(X) y D(X).

2º. Probabilidad de que una pieza tomada al azar sea corre

3º. Probabilidad de que una caja tomada al azar no tenga m de 2 elementos defectuosos.

RESOLUCION:

1º) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1 \Rightarrow \int_1^6 k(x-1)(6-x)\,dx=1 \Rightarrow k\left(\frac{7x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-6x\right)_1^6=1 \Rightarrow k=\frac{6}{125}$.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx=\int_1^6 \frac{6}{125}(7x-x^2-6)\cdot x\,dx=\frac{6}{125}\int_1^6 (7x^2-x^3-6x)\,dx=$$

$$=\frac{6}{125}\left[\frac{7x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-3x^2\right]_1^6=\frac{6}{125}\cdot\frac{875}{12}=\boxed{\frac{7}{2}=3,5=E(X)}$$

$$D^2(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_1^6 \frac{6}{125}x^2(7x-x^2-6)\,dx-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{6}{125}\cdot\frac{1125}{4}-\frac{49}{4}=\frac{5}{4}\Rightarrow\boxed{D(X)=\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

2º) $E(X)-1,5D(X)=3,5-1,5\,1,118=1,823$; $E(X)+1,5D(X)=3,5+1,5\cdot 1,118=5,177$.

$$P(1,823\leq X\leq 5,177)=\int_{1,823}^{5,177}\frac{6}{125}(7x-x^2-6)\,dx=\frac{6}{125}\left[\frac{7x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-6x\right]_{1,823}^{5,177}=\boxed{0,855}$$

3º) ξ: nº elementos defectuosos en una caja (de 8 unidades)

Distribución binomial con $p=0,145$; $q=0,855$.

$$P(\xi\leq 2)=\sum_{r=0}^{2}\binom{8}{r}0,145^r\,0,855^{8-r}\simeq 0,2725+0,3847+0,2376=\boxed{0,8948}$$

(aproximando por $p=0,15$ y $q=0,85$).

SOLUCIONES de las CUESTIONES

1er examen parcial. ESTADÍSTICA (3º).

13-Diciembre-89.

	A	B	C	D
1	e	a	d	c
2	a	d	d	a
3	b	a	e	d
4	b	b	a	d
5	a	c	b	a
6	d	e	e	b
7	d	d	b	d
8	c	e	a	e
9	d	d	d	b
10	e	b	c	e

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES
Universidad de Navarra
Paseo Manuel de Lardizábal, 13
20009 San Sebastián - ESPAÑA

Examen de Estadística 12-Sept.-95
Primer cuatrimestre

APELLIDOS.....NOMBRE.....

1/ La víctima de un accidente morirá a menos que reciba en los próximos 10 minutos, una cantidad de sangre del tipo ARh+, la cual debe provenir de un único donante. Se necesitan dos minutos para analizar la sangre de un posible donante y otros dos minutos para completar la transfusión. Existe un gran número de donantes de los cuales el 40% de ellos es ARh+. ¿Cuál es la probabilidad de que se salve la víctima si sólo existe un equipo de analistas de sangre?.

$P(ARh^+) = 0,4$ $\quad 2+2=$ (4 min.)

(10 min)

2/ Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo (0,1). Demostrar que la variable aleatoria Y=-2Ln(X), tiene una distribución chi cuadrado. ¿Con cuántos grados de libertad?.

$x = e^{-y/2}$

$X \approx N(0,1)$ $\quad [f(x) = 1/1 = 1]$ $\quad dy = -2\,1/x\,dx \rightarrow [dx = -\frac{x}{2}dy]$

$$[f(y) = 1 \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| = 1 \cdot \left|-\frac{e^{-y/2}}{2}\frac{dy}{dy}\right| = \frac{e^{-y/2}}{2}]$$

$X_n^2 \approx \gamma(1/2, n/2)$

$\gamma(a,p) = 1/\Gamma(p) \cdot a^p x^{p-1} e^{-ax}$ $\qquad a = 1/2,\ p = 1$ $\quad \gamma(1/2,1) = \frac{1}{1} \cdot 1/2^1 x^0 e^{-1/2x}$

$$[f(y) = \frac{e^{-y/2}}{2} \approx \gamma(1/2,1) \approx \gamma(2/2, 2/2) \approx X_2^2]$$

$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)\, P(B_i)$

3/ Una planta armadora recibe microcircuitos provenientes de distintos fabricantes B1, B2 y B3. El 50% del total se compra a B1, mientras que a B2 y a B3 se les compra a partes iguales. El porcentaje de circuitos defectuosos para B1, B2 y B3 es de 5, 10 y 12%, respectivamente. Si los circuitos se almacenan en la planta sin importar quién fue el proveedor:

a) Determinar la probabilidad de que una unidad armada en la planta contenga un microcircuito defectuoso.

b) Se toman dos circuitos y no están defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que hayan sido vendidos por el proveedor B2?.

$P(B1) = 0,5 \quad P(B2) = 0,25 \quad P(B3) = 0,25$

$P(defect/B1) = 0,05 \quad P(defect/B2) = 0,1 \quad P(defect/B3) = 0,12$

a) $P(defect) = P(defect/B1)\,P(B1) + P(defect/B2)\,P(B2) + P(defect/B3)\,P(B3) = 0,025 + 0,025 + 0,03 = 0,08$

b) $P(B2/defect^* \cap defect^*) = \dfrac{P(defect^* \cap defect^*/B2)\,P(B2)}{\sum_{i=1}^{3} P(defect^* \cap defect^*/Bi)\,P(Bi)} =$

$$\frac{P(defect^*/B2)^2\, P(B2)}{P(defect^*/B1)^2 P(B1) + P(defect^*/B2)^2 P(B2) + P(defect^*/B3)^2 P(B3)}$$

4/ Sean X_1 y X_2, dos variables aleatorias con la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} k, & 0 \le x_1 \le 2, \quad 0 \le x_2 \le 1, \quad 2x_2 \le x_1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

a) ¿Son independientes las variables X_1 y X_2?.

b) Calcular $P(X_1 \le 1{,}5\ ;\ X_2 \le 0{,}5)$.

c) Calcular $P(X_2 \le 0{,}5\ /\ X_1 \le 1{,}5)$.